高校数学　専門問題例

例１　次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

(1)　方程式 $2xy-5x+2y-9=0$ の整数解を求めなさい。

(2)　$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ 1<x<y<z \end{cases}$ を満たす整数 x，y，z の値を求めなさい。

（令和元年度）

例２　関数 $y=\sin 2\theta-2\sin\theta-2\cos\theta-1$ ･･･①　について，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，①について，y を x の式で表しなさい。

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，x の値の範囲を求めなさい。

(3)　y の最大値と最小値，またそのときの θ の値を求めなさい。

（令和元年度）

例３　$f(x)=\left|\log_{10}x\right|$ とする。等式 $f(a)=f(b)=3f(\frac{a+b}{2})$　$(0<a<b)$ が成り立つとき，a，b が満たす条件を求めなさい。

（令和２年度）

例４　座標平面上に，円 C : $x^2+y^2-4x-5=0$ および，直線 ℓ : $y=2x+k$ があり，C と ℓ は異なる２点Ｐ，Ｑを共有する。このとき，次の(1)・(2)の問いに答えなさい。ただし，k は実数とする。

(1)　k の値の範囲を求めなさい。

(2)　C と ℓ の共有点Ｐ，Ｑについて，ＰＱ＝４となるとき，k の値を求めなさい。

（令和２年度）

例５　座標空間において，x が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，２点 $\mathrm{P}(x,0,\cos^2 x)$，Ｑ$(x,1-\sin x,0)$ を結ぶ直線ＰＱが動いてできる曲面を S とする。このとき，曲面 S と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体の体積 V を求めなさい。

（令和３年度）

例６　次の文は，高等学校学習指導要領「数学」の「第１款　目標」の一部である。（　a　）～（　e　）にあてはまる語句を書きなさい。

(1) 数学における基本的な概念や原理・法則を（　a　）に理解するとともに，事象を（　b　）したり，数学的に解釈したり，数学的に（　c　）したりする技能を身に付けるようにする。

(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や（　d　）との関係を認識し（　e　）に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。

（令和３年度）

高校数学　正答例

問題番号		正　　答　　例
例１	(1)	与式を変形すると， $(2y-5)(x+1)=4$ $2y-5$ は奇数より， $(2y-5, x+1)=(\pm 1, \pm 4)$ （複号同順） これより， $(x, y)=(-5, 2), (3, 3)$
	(2)	$1<x<y<z$ $\cdots$①より， $\frac{1}{z}<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<1$ よって， $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$ これより $x<3$ $\cdots$② また，①と②より $1<x<3$ よって，これを満たす整数 x は， $x=2$ $\cdots$③ ③を与式に代入し，整理すると $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 同様に， $\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$ これより $y<4$ $\cdots$④ ①，③，④より $2<y<4$ よって，これを満たす整数 y は， $y=3$ $\cdots$⑤ ③，⑤を与式に代入して， $z=6$ $(x, y, z)=(2, 3, 6)$

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th>正　　答　　例</th></tr>
<tr><td rowspan="3">例２</td><td>（1）</td><td>$x = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を２乗し整理すると，
$2\sin\theta\cos\theta = x^2 - 1$，また，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$　よって，①
について y を x の式で表すと，
$y = x^2 - 2x - 2$</td></tr>
<tr><td>（2）</td><td>$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$
$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$
これより，$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$
よって，$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>（3）</td><td>（1），（2）より
$y = (x-1)^2 - 3 \quad (-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2})$
$x = 1$ のとき，
$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ より，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$
$\therefore\ \theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき，最小値 -3
$x = -\sqrt{2}$ のとき，
$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ より，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$　　$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$
$\therefore\ \theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $2\sqrt{2}$</td></tr>
</table>

問題番号		正　　答　　例
例３		$f(a) = f(b)$ より，$\lvert \log_{10} a \rvert = \lvert \log_{10} b \rvert$ $\therefore \log_{10} a = \pm \log_{10} b$ $a < b$ より $\log_{10} a \neq \log_{10} b$ だから $\log_{10} a = -\log_{10} b \Leftrightarrow \log_{10} a + \log_{10} b = 0 \Leftrightarrow \log_{10} ab = 0$ すなわち，$ab = 1$　　—（ｉ） このとき，$0 < a < b$ より，$b > 1$ 相加平均と相乗平均の大小関係より $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} = 1$ であるから， $\log_{10} b > 0,\ \log_{10} \dfrac{a+b}{2} > 0$ となるので　　—（ⅱ） $f(b) = 3f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ より，$\log_{10} b = 3\log_{10} \dfrac{a+b}{2}$ すなわち，$b = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$　　—（ⅲ） よって，求める条件は $ab = 1$，$b = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$
例４	(1)	Cの方程式は$(x-2)^2 + y^2 = 9$ であるから，Cは 中心（２，０），半径3の円である。 中心と ℓ との距離 d は， $d = \dfrac{\lvert 2\cdot 2 + k - 0 \rvert}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{\lvert k+4 \rvert}{\sqrt{5}}$ であるから， Cと ℓ は異なる2点を共有する$\Leftrightarrow d<3$となるので， $\dfrac{\lvert k+4 \rvert}{\sqrt{5}} < 3$ —（ｉ）　$\therefore \lvert k+4 \rvert < 3\sqrt{5}$ したがって，$-3\sqrt{5} < k + 4 < 3\sqrt{5}$ $\therefore -4 - 3\sqrt{5} < k < -4 + 3\sqrt{5}$
	(2)	線分 PQ の中点を M，円 Cの中心を C（２，０）と おくと，CM⊥PQであるから， CP ＝ 3，PM ＝ 2 より $\mathrm{CM} = \sqrt{\mathrm{CP}^2 - \mathrm{PM}^2} = \sqrt{5}$ CM は中心 C と ℓ との距離 d であるので， $\dfrac{\lvert k+4 \rvert}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ —（ⅱ）　$\therefore \lvert k+4 \rvert = 5$ したがって，$k + 4 = \pm 5$　$\therefore k = 1, -9$

問題番号		正　答　例	
例５		R $(x, 0, 0)$ とすると， △ＰＲＱは∠ＰＲＱ＝$\dfrac{\pi}{2}$の直角三角形で x軸に垂直である。 ＰＲ＝$\cos^2 x$，ＲＱ＝$1-\sin x$ より △ＰＲＱ＝$\dfrac{1}{2}(1-\sin x)\cos^2 x$ ゆえに， $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(1-\sin x)\cos^2 x\,dx$ $=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos^2 x+\cos^2 x(-\sin x)\right\}dx$ $=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(\cos 2x+1)\,dx+\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(-\sin x)dx$ $=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}\sin 2x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{6}$	
例６	(1)	a	体系的
		b	数学化
		c	表現・処理
	(2)	d	他の事象
		e	統合的・発展的