中学校数学　　専門問題例

例１　関数 $y=\sin 2\theta-2\sin\theta-2\cos\theta-1$ ・・・①　について，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，①について，y を x の式で表しなさい。

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，x の値の範囲を求めなさい。

(3)　y の最大値と最小値，またそのときの θ の値を求めなさい。

（R元年度）

例２　次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

(1)　$\sqrt{126-3n}$ が整数となる自然数ｎの値をすべて求めなさい。

(2)　連続する２つの自然数がある。小さい方を５でわった余りが２であるとき，２つの数の和は５の倍数になる。このことを，実際の自然数を使って例を１つ示し，その後，文字を使って説明しなさい。

（R元年度）

例３　$f(x)=\left|\log_{10}x\right|$ とする。等式 $f(a)=f(b)=3f(\frac{a+b}{2})$　$(0<a<b)$ が成り立つとき，a，b が満たす条件を求めなさい。

（R２年度）

例４　平面上に，１辺の長さ１の正三角形ＯＡＢがあり，点Ｐは　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ を満たす。このとき，次の(1)・(2)の問いに答えなさい。ただし，α，β は実数とする。

(1)　$3\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$ が成り立つとき，点Ｐの存在する範囲を図示しなさい。

(2)　$\alpha+6\beta\leqq3$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$ が成り立つとき，点Ｐの存在する範囲を図示し，その面積を求めなさい。

（R２年度）

例５　放物線 $y=x^2$ について，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　放物線上の点Ａ $(-a,\ a^2)$ $(a>0)$ を通り，Ａにおける接線と垂直に交わる直線を ℓ とする。直線 ℓ の方程式を求めなさい。

(2)　(1)の直線 ℓ と放物線との点Ａ以外の交点をＢとする。a の値が変化するとき，点Ｂの x 座標を最小にする a の値を求めなさい。

(3)　(2)のとき，放物線と直線ＡＢが囲む図形の面積 S を求めなさい。

（R３年度）

例６　中学校学習指導要領「第２章　各教科」「第３節　数学」「第２　各学年の目標及び内容」について，次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

(1)　次の文は，〔第２学年〕・〔第３学年〕「２　内容」の[数学的活動]の部分である。（　ａ　）～（　ｇ　）にあてはまる語句を書きなさい。

> (1)　「Ａ数と式」，「Ｂ（　ａ　）」，「Ｃ関数」及び「Ｄ（　ｂ　）」の学習やそれらを相互に関連付けた学習において，次のような数学的活動に取り組むものとする。
> ア　日常の事象や（　ｃ　）を数理的に捉え，数学的に表現・（　ｄ　）し，問題を解決したり，解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動
> イ　数学の事象から（　ｅ　）をもって問題を見いだし解決したり，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動
> ウ　数学的な表現を用いて（　ｆ　）に説明し（　ｇ　）活動

(2)　次の文は，〔第２学年〕「２　内容」の一部である。（　ａ　）～（　ｆ　）にあてはまる語句を，下のア～ソの中からそれぞれ１つ選び，記号で書きなさい。

> Ｃ　関数
> (1)　一次関数について，数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。
> ア　次のような知識及び技能を身に付けること。
> (ｱ)　一次関数について理解すること。
> (ｲ)　事象の中には一次関数として捉えられるものがあることを知ること。
> (ｳ)　（　ａ　）を関数を表す式とみること。
> イ　次のような思考力，（　ｂ　）力，表現力等を身に付けること。
> (ｱ)　一次関数として捉えられる二つの数量について，（　ｃ　）の特徴を見いだし，表，（　ｄ　），グラフを相互に関連付けて考察し表現すること。
> (ｲ)　一次関数を用いて（　ｅ　）な事象を捉え考察し表現すること。
> ［用語・記号］
> （　ｆ　）　傾き

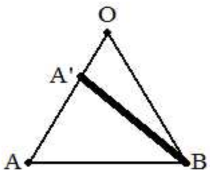
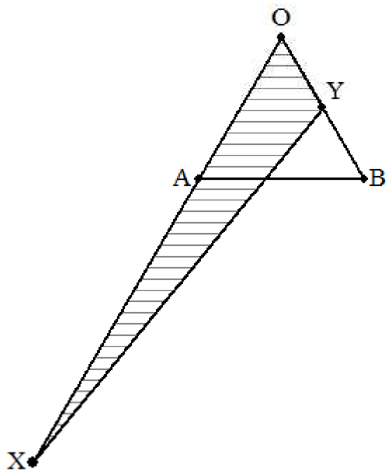
ア　連立方程式	イ　変化の割合	ウ　判断
エ　抽象的	オ　分析	カ　図
キ　変数	ク　変化や対応	ケ　数学的
コ　式	サ　変域	シ　数
ス　二元一次方程式	セ　比例	ソ　具体的

（Ｒ３年度）

中学校数学　　正答例

問題番号		正　　答　　例
例１	(1)	$x = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を２乗し整理すると， $2\sin\theta\cos\theta = x^2 - 1$ よって，①について y を x の式で表すと， $y = x^2 - 2x - 2$
	(2)	$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ これより，$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ よって，$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$
	(3)	(1)，(2)より $y = (x-1)^2 - 3 \quad (-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2})$ $x = 1$ のとき， $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ より，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ $\therefore\ \theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき，最小値 -3 $x = -\sqrt{2}$ のとき， $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ より，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$ $\therefore\ \theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $2\sqrt{2}$

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th>正　答　例</th></tr>
<tr><td rowspan="2">**例２**</td><td>(1)</td><td>$126-3n=3(42-n)$
kを０以上の整数として，$42-n=3k^2$となればよい
$k=0$のとき　$42-n=3\times 0^2$　　$n=42$
$k=1$のとき　$42-n=3\times 1^2$　　$n=39$
$k=2$のとき　$42-n=3\times 2^2$　　$n=30$
$k=3$のとき　$42-n=3\times 3^2$　　$n=15$
答え　４２，３９，３０，１５</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>（正答例）　$12+13=25$　２５は５の倍数
ｎを整数とすると，小さい方の自然数$5n+2$と表される。
このとき大きい方の自然数は，
$(5n+2)+1=5n+3$と表される。
よって，これら２つの数の和は，
$(5n+2)+(5n+3)=10n+5$
$=5(2n+1)$
$2n+1$は，整数であるから，$5(2n+1)$は，５の倍数である。
よって，２つの数の和は，５の倍数になる。</td></tr>
<tr><td>**例３**</td><td></td><td>$f(a)=f(b)$ より，$\left|\log_{10} a\right|=\left|\log_{10} b\right|$
$\therefore \log_{10} a=\pm\log_{10} b$
$a<b$ より $\log_{10} a\neq\log_{10} b$ だから
$\log_{10} a=-\log_{10} b \Leftrightarrow \log_{10} a+\log_{10} b=0 \Leftrightarrow \log_{10} ab=0$
すなわち，$ab=1$
このとき，$0<a<b$ より，$b>1$
相加・相乗平均の関係より
$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}=1$ であるから，
$\log_{10} b>0,\ \log_{10}\dfrac{a+b}{2}>0$ となるので
$f(b)=3f(\dfrac{a+b}{2})$ より，$\log_{10} b=3\log_{10}\dfrac{a+b}{2}$
すなわち，$b=(\dfrac{a+b}{2})^3$
よって，求める条件は
$ab=1,\ b=(\dfrac{a+b}{2})^3$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th>正　答　例</th></tr>
<tr><td rowspan="2">例 4</td><td>(1)</td><td>$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OP}=3\alpha\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ と変形できる。
$\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ とすると，
$\overrightarrow{OP}=3\alpha\overrightarrow{OA'}+\beta\overrightarrow{OB}$，$3\alpha+\beta=1$，$3\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$ であるから
点Pは線分 A'B 上にある。
よって点Pの存在範囲は，左下図の太線部分（端点を含む）となる。

</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$\alpha+6\beta\leqq 3$ より $\frac{\alpha}{3}+2\beta\leqq 1$ であるから
$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OP}=\frac{\alpha}{3}\cdot 3\overrightarrow{OA}+2\beta\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ と変形できる。
$\overrightarrow{OX}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OY}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ とすると，
$\overrightarrow{OP}=\frac{\alpha}{3}\overrightarrow{OX}+2\beta\overrightarrow{OY}$，$\frac{\alpha}{3}+2\beta=1$，$\frac{\alpha}{3}\geqq 0$，$2\beta\geqq 0$ であるから
点Pは△0XYの周上および内部にある。
よって点Pの存在範囲は，右下図の斜線部分（境界を含む）となる。
また，
$OX=3$，$OY=\frac{1}{2}$，$\angle XOY=60^\circ$
であるから，
その面積は，
$\triangle OXY=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 60^\circ$
$=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

</td></tr>
</table>

問題番号		正　　答　　例
例５	(1)	$y'=2x$ より，　ℓ ：$y=\frac{1}{2a}(x+a)+a^2=\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$ 　　　　$\therefore$ ℓ ：　$y=\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$
	(2)	$x^2=\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$ を解くと， $(x+a)\left(x-a-\frac{1}{2a}\right)=0$　　$\therefore x=-a,\ a+\frac{1}{2a}$ よって，Ｂの x 座標は $x=a+\frac{1}{2a}$ ここで，$a>0$より，$\frac{1}{2a}>0$ 相加平均と相乗平均の関係より 　$a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{a\times\frac{1}{2a}}$　$\therefore a+\frac{1}{2a}\geqq\sqrt{2}$ 等号が成立するとき， 　$a=\frac{1}{2a}$　　$a>0$より，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ よって，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，Ｂの x 座標は最小となる。
	(3)	$S=\int_{-a}^{a+\frac{1}{2a}}\left\{\left(\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}\right)-x^2\right\}dx$ $=-\int_{-a}^{a+\frac{1}{2a}}(x+a)\left(x-a-\frac{1}{2a}\right)dx$ $=-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-\sqrt{2})dx$ $=\frac{1}{6}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{9\sqrt{2}}{8}$

問題番号		正　　答　　例	
例６	(1)	a	図形
		b	データの活用
		c	社会の事象
		d	処理
		e	見通し
		f	論理的
		g	伝え合う
	(2)	a	ス
		b	ウ
		c	ク
		d	コ
		e	ソ
		f	イ